Moscow Lomonosov State University
Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences
Tolstoy Tula State Pedagogical University
Khabarovsk Division of Institute for Applied Mathematics
Clay Mathematics Institute
Russian Foundation for Basic Research

International Scientific Conference

"Diophantine and analytic problems in number theory"

dedicated to the 100th birthday
of A. O. Gelfond (1906–1968)

ABSTRACTS

Moscow, Russia, January 29–February 2, 2007

Program Committee:

Alan Baker (Cambridge University, UK)
Vasilii I. Bernik (Minsk, Belarussia)
Anatoly A. Karatsuba (Moscow, Russia)
Yuri I. Manin (Evanston, USA)
David W. Masser (Basel, Switzerland)
Yuri V. Matiyasevich (St.-Petersburg, Russia)
Yuri V. Nesterenko (Moscow, Russia) - Chairman
Aleksei N. Parshin (Moscow, Russia)
Wolfgang M. Schmidt (Colorado, USA)
Michel Waldschmidt (Paris, France)

Local Organizing Committee:

Gennadii I. Arkhipov (Steklov Mathematical Institute, Moscow)
Victor A. Bykovskii (Institute for Applied Mathematics, Khabarovsk)
Nikolai M. Dobrovolskii (Tula State Pedagogical University)
Alexander I. Galochkin (Moscow Lomonosov State University)
Oleg N. German (Moscow Lomonosov State University)
Wadim V. Zudilin (Moscow Lomonosov State University)
Nikolai G. Moshchevitin (Moscow Lomonosov State University)
Yuri V. Nesterenko (Moscow Lomonosov State University)
Tatiana A. Preobrazhenskaya (Moscow Lomonosov State University)
Mikhail A. Cherepnev (Moscow Lomonosov State University)
Vladimir G. Chirskii (Moscow Lomonosov State University)
Vladimir N. Chubarikov (Moscow Lomonosov State University)
David Alexandre Ellwood (Clay Mathematics Institute)

Contact e-mail: `gelfond-100@mi.ras.ru`

Transcendence measures via the Thue–Siegel–Roth–Schmidt method

Boris Adamczewski[1]

University Lyon 1, France

E-mail: adamczew@math.univ-lyon1.fr

This talk aims to illustrate the following claim: when a real number is proved to be transcendental via the Schmidt Subspace Theorem, most of the time (always?) the proof actually provides a transcendance measure. We will introduce a new approach based on quantitative statements. This approach will be used to study how real numbers whose b-adic expansion has a sublinear complexity fit into Mahler's classification. Among such numbers one has, for instance, Sturmian numbers, numbers generated by finite automata or lacunary series.

Эффективные оценки для обобщенных глобальных соотношений

T. R. Azamatov

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: azamatov@mail.ru

В докладе рассмотрены оценки многочленов от значений F-рядов в случае, когда рассматриваемая точка представляет собой ряд, хорошо приближаемый алгебраическими числами и сходящийся в любом в неархимедовски нормированном поле. Полученные оценки полностью эффективны, т.е. все входящие в них параметры можно выразить через параметры классов F-рядов и системы дифференциальных уравнений, которым они удовлетворяют.

The report presents lower estimates for polynomials in the values of F-series in the case when the considered point is a series very well approximable by algebraic numbers and convergent in any non-archimedean field. The estimates obtained are totally effective, i.e., they can be explicitly expressed in terms of the class parameters and the parameters of the corresponding system of differential equations.

[1]This is a joint work with Yann Bugeaud.

Многочлен Гильберта и линейные формы от логарифмов алгебраических чисел

Yuri Alexencev

Московский государственный институт стали и сплавов

E-mail: alexencev@mail.ru

Доклад посвящен оценке однородной линейной формы с целыми коэффициентами от логарифмов алгебраических чисел. Эти оценки имеют широкое применение в теории чисел. В работе предложен новый технический подход к доказательству подобных оценок. Подход основан на том, что индукция ведется не как во всех предыдущих работах по числу логарифмов алгебраических чисел, а по величине многочлена Гильберта некоторой целочисленной решетки, содержащей вектор коэффициентов исходной линейной формы. При доказательстве индукцией по числу логарифмов на каждом шаге приходится менять линейную форму, при этом портится как качественный так и количественный вид оценки. В доказательстве индукцией по величине многочлена Гильберта объемлющей решетки исходная линейная форма не меняется вовсе, что позволяет получить оптимальную зависимость оценки от коэффициентов линейной формы (что не удавалось сделать ранее), получить наилучшие константы при малых значениях логарифмов и упростить доказательство на завершающем этапе. Построить доказательство таким образом удалось в том числе благодаря некоторому тождеству для многочленов Гильберта.

Torsion cosets on subvarieties of $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$

Iskander Aliev[1]

School of Mathematics, University of Edinburgh, UK

It was conjectured by S. Lang and proved by M. Laurent that all solutions of a system of polynomial equations in roots of unity can be described in terms of a finite number of parametric families called maximal torsion cosets. In this talk we give explicit upper bounds for the number of maximal torsion cosets on an algebraic subvariety of the complex algebraic

[1]This is a joint talk with Chris Smyth (Edinburgh).

torus $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$. In contrast to earlier works, the bounds are of polynomial growth in the degree of defining polynomials.

Chromatic numbers of real numbers[1]

Renat Akhunzhanov[§] & Nikolai Moshchevitin[♯]

[§]Astrakhan State University
[♯]Moscow State University

E-mail: moshchevitin@rambler.ru

For a real number $\theta > 1$ we denote by $\chi(\theta)$ the minimal number of colors required for coloring the real line $\mathbb{R}$ in such a way that any two points $x, y \in \mathbb{R}$ with $|x - y| = \theta^k$ (where k is a nonnegative integer) are colored in different colors.

Теорема 1. 1. *If θ is transcendental then $\chi(\theta) = 2$.*

2. *If θ is algebraic and not an algebraic unit then $2 \leqslant \chi(\theta) \leqslant 3$.*

3. *If θ is an algebraic unit of degree $n \geqslant 2$ then*

$$2 \leqslant \chi(\theta) \leqslant cn^2 \left(\frac{\log n}{\log \log n} \right)^6$$

with some absolute constant c.

4. *If an algebraic unit θ of degree n is non-reciprocal, one has the upper bound $\chi(\theta) \leqslant cn^2$.*

Теорема 2. 1. *The following equality holds*:

$$\max_{\theta \in \mathbb{Z}_{\mathbb{A}}, \deg \theta = 2} \chi(\theta) = 4.$$

Moreover, for a quadratic irrationality, $\chi(\theta)$ may take any value in the set $\{2, 3, 4\}$.

2. *The following estimate holds*:

$$5 \leqslant \max_{\theta \in \mathbb{Z}_{\mathbb{A}}, \deg \theta = 3} \chi(\theta) \leqslant 8.$$

We have some structural results for the corresponding distance graphs.

[1]The research was supported by RFFI grant no. 06-01-00383. The research of N. Moshchevitin was also supported by grant MD-3003.2006.1 of the President of RF.

Simultaneous Diophantine approximation and rational points near planar curves

Victor Beresnevich

Institute of Mathematics, Belarus Academy of Sciences, Minsk;
Department of Mathematics, University of York, UK

E-mail: vb8@york.ac.uk

We discuss recent progress in the metrical theory of simultaneous Diophantine approximation (by rational points) of points on planar curves. This area of research is considerably less developed than its dual counterpart (approximation by linear forms). Related questions of the distribution of rational points near planar curves are discussed.

О влиянии работ А. О. Гельфонда на метрическую теорию диофантовых приближений

Vasilii Bernik

Institute of Mathematics, Minsk, Belorussia

Во многих задачах метрической теории трансцендентных чисел надо оценивать количество целочисленных многочленов, принимающих малые значения на некотором интервале, а также выделять из них степени неприводимых многочленов, которые также малы на этом интервале. Подобными задачами занимался А. О. Гельфонд. В докладе будет рассказано об обобщении двух лемм Гельфонда и о применении полученных результатов в диофантовых приближениях.

Multiplicity and vanishing lemmas for differential and q-difference equations in the Siegel–Shidlovsky theory

Daniel Bertrand

University Paris VI, France

E-mail: bertrand@math.jussieu.fr

We shall present a general multiplicity estimate for linear forms in solutions of various types of functional equations, which covers and extends the zero estimates used in recent work on the Siegel–Shidlovsky theorem and its q-analogues. We shall also present a dual version of this estimate, as well as a new interpretation of Siegel's theorem itself in terms of periods of Deligne's "irregular" Hodge theory.

Generalization of continued fraction

Alexander D. Bruno

Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russia

Пусть в трехмерном вещественном пространстве заданы три вещественные однородные линейные формы. Их модули дают отображение этого пространства в другое. В нем рассматривается выпуклая оболочка образов всех целочисленных точек первого пространства, кроме его начала координат. Замыкание этой выпуклой оболочки названо модульным многогранником. Наилучшие целочисленные приближения к корневым подпространствам заданных форм дают точки, образы которых лежат на границе модульного многогранника. Изучаются те свойства модульного многогранника, которые используются для построения алгоритма, обобщающего цепную дробь. Алгоритм дает также периодичность для кубических иррациональностей с положительным дискриминантом. Обобщить цепную дробь пытались Эйлер, Якоби, Дирихле, Эрмит, Пуанкаре, Гурвиц, Клейн, Минковский, Вороной, Скубенко, Арнольд и многие другие.

Let three linear homogeneous forms be given in real 3-space R. Their moduli map the space R into the 3-space S. In the space S, we consider the convex hull of the images of all integer points of the space R,

except the origin. The closure of the convex hull is called the modular polyhedron. The best integer approximations to the root subspaces of the given forms in the space R give the points lying in the surface of the modular polyhedron in the space S. We study the properties of the modular polyhedron, which are useful for construction of the algorithm generalizing the continued fraction. The proposed algorithm gives periodicity for cubic irrationalities with positive discriminant. Various attempts to generalize the continued fractions were made by Euler, Jacobi, Dirichlet, Hermite, Poincaré, Hurwitz, Klein, Minkowski, Voronoi, Skubenko, Arnold, and many others.

Simultaneous Diophantine approximation on polynomial surfaces

Natalia Budarina

Vladimir State Pedagogical University, Russia

E-mail: budarina@vgpu.vladimir.ru

The Hausdorff dimension of the set of simultaneously τ-approximable points lying on some simple polynomial surfaces is obtained for sufficiently small error functions.

Статистика траекторий частиц для однородной двумерной модели "Периодический газ Лоренца"[1]

Victor A. Bykovskii & Alexey V. Ustinov

Institute for Applied Mathematics, Khabarovsk Division

E-mail: ustinov@iam.khv.ru

The talk presents a new result on trajectory statistics in the model of the periodic two-dimensional homogeneous Lorentz gas (Sinai billiard). This result is more general and precise than previous one proved by Florin P. Boca, Radu N. Gologan, and Alexandru Zaharescu.

[1]The research was supported by INTAS grant no. 03-51-5070 and by project 06-I-П-13-047 of the Far Eastern Branch of RAS.

В докладе будет представлен новый результат о статистических свойствах траекторий частиц в двумерной однородной модели "Периодический газ Лоренца". Он обобщает и уточняет соответствующие результаты Ф. Бока, Р. Гологана и А. Захареску.

On linear independence of the values of some q-series

Keijo Väänänen

University of Oulu, Finland

E-mail: kvaanane@sun3.oulu.fi

We shall consider linear independence of the values of functions $f_1(z), \dots, f_m(z)$ satisfying a system of q-difference equations

$$z^s \bar{f}(qz) = a(z)C\bar{f}(z) + \bar{b}(z)$$

where s is a positive integer, $|q| < 1$, C is a non-singular constant matrix, and $a(z)$ and the components of $\bar{b}(z)$ are polynomials of degrees $\leqslant s$, $a(0) \neq 0$. There are a lot of works considering the arithmetic properties of the values of functions of this type starting from the papers on Tschakaloff function and q-exponential function. In a recent joint work with Amou and Matala-aho we proved a general linear independence result implying, for example, the linear independence of 1 and the values of

$$\varphi_{\mu\nu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{sn(n+1)/2} n^\nu}{[a(q)]_n} (q^\mu z)^n, \quad \mu = 0, 1, \dots, s-1, \ \ \nu = 0, 1, \dots, l-1,$$

where $q^{-1} \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$, $a(z) \in \mathbb{Q}(z)$ satisfies $a(q^i) \neq 0$, $i = 1, 2, \dots$, $[a(q)]_0 = 1$ and $[a(q)]_n = a(q) \cdots a(q^n)$ for $n \geqslant 1$.

The results are obtained both in the archimedean and p-adic cases and also a quantitative linear independence measure is given.

О коротком доказательстве теста на простоту Лукаса–Лемера

Denis Vasilyev

Institute of Mathematics, Minsk, Belorussia

E-mail: vasilyev@im.bas-net.by

A method for testing primality of numbers of the type $p = 2^q - 1$ was first introduced by E. Lucas in 1878. In 1930 D. Lehmer has modified this method and proposed a simple procedure which allows effectively search for Mersenne primes. The original proof of the Lucas test is quite lengthy and a shorter proof was given in 1993 by J. W. Bruce. We propose even shorter modification of this proof.

Метод тестирования на простоту чисел вида $p = 2^q - 1$ был впервые предложен Э. Лукасом в 1878 г. В 1930 г. Д. Лемер модифицировал этот метод и предложил простую процедуру, которая позволяет эффективно получать простые числа Мерсенна. Оригинальное доказательство было довольно длинным и в 1993 г. Дж. Брюсом было предложено короткое доказательство. В докладе предлагается еще более сокращенная версия данного доказательства.

Diophantine approximation, fractal sets and lacunary sequences

Sanju Velani

Department of Mathematics, University of York, UK

E-mail: slv3@york.ac.uk

The metric theory of Diophantine approximation on fractal sets is developed in which the denominators of the rational approximates are restricted to lacunary sequences. The case of the standard middle third Cantor set and the sequence $\{3^n : n \in \mathbb{N}\}$ is the starting point of our investigation. Our metric results for this simple setup answers a problem raised by Mahler. As with all 'good' problems — its solution opens up a can of worms.

On the equivalence between Beukers-type and Sorokin-type multidimensional integrals

Carlo Viola

Pisa University, Italy

E-mail: viola@dm.unipi.it

It is well known that a triple Beukers-type integral, as defined in the paper by G. Rhin and C. Viola [*Acta Arith.* **97** (2001), 269–293] can be transformed into a suitable triple Sorokin-type integral. I will discuss possible extensions to the n-dimensional case of a similar equivalence between suitably defined Beukers-type and Sorokin-type multiple integrals, with consequences on the arithmetical structure of such integrals as linear combinations of zeta-values with rational coefficients.

Arithmetic properties of coefficients of several modular forms

Galina Voskresenskaya

Samara University, Russia

E-mail: galvosk@mail.ru

We consider modular forms which are completely determined by the following conditions: they are cusp forms of integer weights with characters, all their zeroes are in the cusps and each zero has the multiplicity one. A priori we do not give other assumptions but in fact these functions are eigenforms of Hecke algebra and can be expressed as products of Dedekind η-functions of various arguments. Their Fourier coefficients are multiplicative and they are called *mulplicative η-products*. We investigate these functions from various points of view. In particular we study the arithmetic properties of their Fourier coefficients. We consider Shimura sums related to the modular forms and prove several families of identities involving them. The type of identity obtained depends on the splitting of primes in certain imaginary quadratic number fields. Shimura sums are in a sense analogous to Gaussian and Jacobian sums.

Definition. Let $a(n)$ be an arithmetic function and c a positive integer ($a(x) = 0$ if x is not integer). Then for $m \geqslant 1$ the Shimura sum $\mathrm{Sh}(m, a, c)$ is defined by the formula

$$\mathrm{Sh}(m, a, c) = \sum_{j=1}^{m-1} a\left(\frac{m^2 - j^2}{c}\right).$$

Theorem. *Let* $f(z)$ *be*

$$\eta^2(12z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) q^n \in S_1(144, \chi).$$

1) If p *is inert in* $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ *then* $p = -2\,\mathrm{Sh}(p^2, a, 1) - 1$.

2) If p *splits in* $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ *then* $p = l^2 + 3m^2$, *where*

$$\left(\frac{l}{3}\right) l = \mathrm{Sh}(p, a, 1) + 2,$$

$$p = \left(2\,\mathrm{Sh}(p, a, 1) + a^2(p)\right)^2 - 2\,\mathrm{Sh}(p^2, a, 1) - a^2(p^2) - 2\,\mathrm{Sh}(p, a, 1).$$

We prove analogous theorem for the functions $\eta^4(6z)$, $\eta(16z)\eta(8z)$, $\eta(18z)\eta(6z)$ and obtain many other expressions.

References

[1] D. Dummit, H. Kisilevsky, and J. McKay, "Multiplicative products of η-functions," *Contemp. Math.* **45** (1985), 89–98

[2] K. Ono, *The web of modularity: arithmetic of the coefficients of modular forms and q-series*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

[3] G. V. Voskresenskaya, "Multiplicative Dedekind η-functions and representations of finite groups", *J. Theor. Nombres Bordeaux* **17** (2005), 359–380.

On the distribution of values of quadratic forms

Friedrich Götze

Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld, Germany

E-mail: goetze@mathematik.uni-bielefeld.de

We shall discuss some recent results on effective bounds for the local distribution of values of irrational indefinite quadratic forms on lattices in dimension five and larger in the Oppenheim problem. The proofs are based on analytic bounds for theta functions and equidistribution results for orbits of unipotent subgroups. In particular applications to bounds for solutions of diophantine inequalities for indefinite forms extending extending results by Birch and Davenport are made. This is joint work with G. Margulis.

Furthermore, applications to open problems for rates in the central limit theorem for balls in dimension five are discussed. This is joint work with A. Zaitsev.

О структуре множества E-функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям второго порядка

Василий А. Горелов

Московский энергетический институт (технический университет)

E-mail: gorelov.va@mail.ru

Доказывается, что функция $f(z)$ тогда и только тогда является E-функцией, удовлетворяющей уравнению

$$Q_2y'' + Q_1y' + Q_0y = Q, \qquad Q_2, Q_1, Q_0, Q \in \mathbb{C}[z],$$

когда $f(z) = P_0\varphi_\lambda(\alpha z)+P_1\varphi_{\lambda_1}(\alpha_1 z)+P$ или $f(z) = P_0f_1(z)+P_1f_1'(z)+P$, где

$$\varphi_\lambda(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(\lambda+1)\cdots(\lambda+n)},$$

$P_0, P_1, P \in \mathbb{A}[z]$, $\lambda, \lambda_1 \in \mathbb{Q}$, $\alpha, \alpha_1 \in \mathbb{A}$, $f_1(z)$ — E-функция, удовлетворяющая уравнению

$$y'' + \left(a + \frac{a_1}{z}\right)y' + \left(b + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2}\right)y = c + \frac{c_1}{z},$$

$a, a_1, b, b_1, b_2, c, c_1 \in \mathbb{A}$.

В случае $Q \equiv 0$ и в случае алгебраической зависимости $f(z)$ и $f'(z)$ над $\mathbb{C}(z)$ функцию $f(z)$ можно выразить через гипергеометрические E-функции в явном виде.

Об одном аналоге аддитивной проблемы делителей[1]

С. А. Гриценко & Л. Н. Куртова

Белгородский государственный университет, Россия

E-mail: gritsenko@bsu.edu.ru

В 1927 году английский математик А. Ингам поставил и решил элементарным методом задачи получения асимптотических формул для числа решений уравнений

$$x_1x_2 + x_3x_4 = n,$$
$$x_1x_2 - x_3x_4 = 1, \quad x_1x_2 \leqslant n.$$

Эти задачи получили название аддитивные проблемы делителей.

В математической литературе известны многочисленные задачи, родственные аддитивным проблемам делителей (их аналоги). Мы заинтересовались одним из таких аналогов. Пусть K — мнимое квадратичное поле, $\mathbb{Z}_K$ – его кольцо целых алгебраических чисел, X — неглавный характер группы классов идеалов кольца $\mathbb{Z}_K$. Пусть $a(m) = \sum_{N(A)=m} X(A)$, где суммирование идет по всем целым идеалам $\mathbb{Z}_K$, норма которых равна m.

Нашим основным результатом является следующая теорема.

[1]Работа поддержана Министерством образования и науки РФ в рамках программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (грант РНП.2.1.1.3263) и Белгородским государственным университетом (грант ВГК 007-04).

Теорема. *Пусть ε — произвольное положительное число, a, b, h — натуральные числа такие, что $abh \leqslant N^{\varepsilon}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда справедлива оценка*

$$S(n) = \sum_{\substack{k=1 \\ ak-bm=h}}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a(k)\overline{a}(m)e^{-\frac{k+m}{n}} = O(n^{\frac{3}{4}+\varepsilon}).$$

Легко видеть, что $S(n)$ представляет собой число решений уравнения $ak - bm = h$, в натуральных числах k, m, причем каждое решение считается с «весом» $a(k)\overline{a}(m)e^{-\frac{k+m}{n}}$.

Теорема доказывается круговым методом с использованием оценок А. Вейля сумм Клостермана.

Some difference equations which are connected with Mejer's functions, and their applications

Leonid A. Gutnik

Moscow State University of Electronics and Mathematics

E-mail: gutnik@gutnik.mccme.ru

Properties of some difference equations which are connected with Mejer's functions, and their applications to Diophantine approximations will be discussed in the report.

Целые точки алгебраических кривых

В. А. Демьяненко

Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург

Пусть k — алгебраическое числовое поле степени n, $F_m(x, y)$ — бинарная однородная форма степени m и $F_m(x, y) = A$ — кривая, определенные над этим полем.

Найдены явная оценка числа целых k-точек кривой $F_m(x, y) = A$ и явная оценка высоты этих точек. Аналогичные результаты получены и для эллиптических кривых ограниченного ранга.

О порядках нулей многочленов от некоторых аналитических функций

Алексей П. Долгалев

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: alex_fc_1@mtu-net.ru

Устанавливаются оценки порядка нулей многочленов от совокупности функций, являющейся решением системы алгебраических дифференциальных уравнений и удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям. Эти оценки улучшают существовавшую ранее аналогичную оценку для одной точки в случае алгебраически независимых функций. Доказательство основано на теории идеалов в кольцах многочленов.

Подобные оценки бывают полезны при доказательстве алгебраической независимости значений функций в алгебраических точках.

Discrete logarithms in $GF(p)$ — 135 digits

A. Ya. Dorofeev & D. M. Dygin & D. V. Matyukhin

E-mail: dmatyukhin@mail.ru

Recently we have computed discrete logarithm modulo 135-digits (448 bits) prime modulus. As far as we know, this is a new record for the general discrete logarithm problem. Precisely, we took a strong prime

$$\begin{aligned} p &= \lfloor 2^{446}\pi \rfloor + 63384 \\ &= 57085779914791394314207329815945329074737629555045190511 3\backslash\backslash \\ &\quad 86537591186591858802294523702070250020343761541967996165\backslash\backslash \\ &\quad 9928369778961422486479 \end{aligned}$$

and a generator $g = 7$ of the multiplicative group $\bmod p$, and computed

$$\begin{aligned} \log_g 11 = 26380941544253268435779383277762670448370011005096 16\backslash\backslash \\ 31240336610545143645723034872275030016383962573841 1\backslash\backslash \\ 81649388892154031068496007427 12. \end{aligned}$$

The computation took about 45000 MIPS-years. In the lecture we present some details of it.

On the set of roots of $\{-1, 0, 1\}$ polynomials

Arturas Dubickas

Vilnius University, Lithuania

E-mail: arturas.dubickas@mif.vu.lt

Let V be the set of roots of integer polynomials of height 1 with nonzero constant term, that is, $\alpha \in V$ if and only if there exists a positive integer n and $a_1, \dots, a_n \in \{-1, 0, 1\}$ such that $1 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n = 0$. The set V, its closure $\overline{V}$, some related sets and their applications to other problems have been studied on several occasions, e.g., [1]– [3].

It is quite clear that if $\alpha \in V$ then α is an algebraic number (in fact, a unit) that lies with its conjugates in the annulus $1/2 < |z| < 2$. Is this condition sufficient?

In [4], we show that if α is a unit that lies with its conjugates in the annulus $1/2 < |z| < 2$ then α is not necessarily in V. For instance, the number $(1+\sqrt{5})(-1+\sqrt{-3})/4$, with minimal polynomial $x^4+x^3+2x^2-x+1$, is proved to be such an example. Moreover, one of our results in [4] implies that, in principle, no restriction on the size of conjugates of α can be given to force α to belong to V. In contrast, it was shown in [1] that every complex number α lying in the annulus $1/\sqrt{2} < |\alpha| < 1$ is a root of some $\{-1, 0, 1\}$ power series.

References

[1] M. Barnsley and A. N. Harrington, "A Mandelbrot set for pairs of linear maps," *Phys. D* **15** (1985), 421–432.

[2] T. Bousch, *Sur quelques problèmes de dynamique holomorphe*, Ph.D. thesis, Univ. Paris Sud, 1992.

[3] A. M. Odlyzko and B. Poonen, "Zeros of polynomials with $0, 1$ coefficients," *Enseign. Math.* (2) **39** (1993), 317–348.

[4] P. Drungilas and A. Dubickas, "Roots of polynomials of bounded height," *Rocky Mount. J. Math.* (to appear).

Diophantine results related to discriminants and resultants of polynomials and binary forms

Kalman Győry

Univertsity of Debrecen, Hungary

E-mail: gyory@math.klte.hu

Let S be finite, possibly empty set of primes, $\mathbb{Z}_S$ the ring of S-integers and $\mathbb{Z}_S^*$ the group of S-units in $\mathbb{Q}$. Numerous diophantine problems can be reduced to discriminant equations of the form

$$D(F) \in D_0\mathbb{Z}_S^* \tag{1}$$

and resultant equations of the form

$$R(G,H) \in R_0\mathbb{Z}_S^*. \tag{2}$$

Here D_0, R_0 are fixed positive integers, F, G, H are unknown monic polynomials or binary forms with coefficients in $\mathbb{Z}_S$, and it is assumed that G and H split into linear factors over a given number field. The solutions of these equations can be divided in a natural way into equivalence classes. Equations (1) and (2) have been studied by many people, including the speaker. Various finiteness theorems have been established for the equivalence classes of solutions which led to important applications to algebraic numbers, number fields, polynomial diophantine equations and irreducible polynomials.

In the talk several new results will be presented on equations (1) and (2) and their more general versions considered over number fields. In the first part general effective theorems will be stated in a quantitative form on the solutions of (1). These significantly improve and refine the earlier related results and provide new information on the arithmetical properties of discriminants of polynomials/binary forms. In the second part some quantitative results concerning (2) will be discussed which have been obtained jointly with A. Bérczes and J. H. Evertse. Among others explicit upper bounds will be formulated for the number of equivalence classes of solutions G, H of given degree. An important feature of these bounds is that they depend only on the degrees of G and H, the cardinality of S and the number of distinct prime factors of R_0. Finally, a common generalization of (1) and (2) will be treated, and some new applications to algebraic numbers

and Thue–Mahler equations will be mentioned. The proofs depend among other things on the theory of logarithmic forms and a quantitative version of the subspace theorem.

Квазилинейные диофантовы уравнения

Vlagimir G. Zhuravlev

Vladimir State Pedagogical University, Russia

E-mail: vzhuravlev@mail.ru

С помощью техники одномерных разбиений Фибоначчи [1] доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $\tau = (-1+\sqrt{5})/2$ *— золотое сечение,* $\langle x\rangle$ *— дробная часть* x*, и пусть дано диофантово уравнение*

$$a_1\langle N_1\tau\rangle + a_2\langle N_2\tau\rangle = c_1\tau - c_2, \tag{1}$$

где коэффициенты a_i, c_i *и переменные* N_i *принадлежат кольцу целых рациональных чисел* $\mathbb{Z}$*. Предположим, что коэффициенты удовлетворяют следующим условиям:* a_1, a_2 *— взаимно простые числа,* $a_2 \geqslant -a_1 \geqslant 3$*,* $c' > 0$*,* $m < c' < M$*,* $-1 < \frac{c'-a_2\tau}{a_1} < \tau$*, где* $c' = (c_1 - c_2 - a_1 - a_2) - c_2\tau$*,* m *— минимальное, а* M *— максимальное значения из множества* $\{a_1x_1 + a_2x_2; x_1, x_2 = \tau, -1\}$*. Тогда система* (1) *разрешима и количество* $n(X)$ *ее решений* (N_1, N_2) *с* $X_1 \leqslant N_1 \leqslant X_1 + X$*, где* X_1 *фиксировано и* $X \to +\infty$*, удовлетворяет асимптотическому равенству*

$$n(X) = kX + o(X), \qquad \text{где} \quad k = \frac{|a_2 - c_1\tau + c_2|}{|a_1|a_2^2}.$$

Любое число $A \in \mathbb{N}$ однозначно разлагается $A = \sum_{n\geqslant 1} \varepsilon_n(A)F_n$ в системе счисления Фибоначчи, где коэффициенты $\varepsilon_n = 0, 1$ и $\varepsilon_n\varepsilon_{n+1} = 0$ для всех $n \geqslant 1$. Равенством $A_1 \circ A_2 = \sum_{n_1,n_2\geqslant 1} \varepsilon_{n_1}(A_1)\varepsilon_{n_2}(A_2)F_{n_1+n_2}$ определяется круговое умножение Кнута. Пусть x' и $n_{F/\mathbb{Q}}(x)$ обозначают сопряжение и норму в квадратичном поле $\mathbb{Q}(\tau)$, $\delta(A) = A+[(A+1)\tau]\cdot\tau$ и $[x]$ — целая часть x.

Теорема 2. *Пусть дано диофантово уравнение*

$$A_1 \circ X_1 - A_2 \circ X_2 = C, \tag{2}$$

где коэфициенты A_i, C *и переменные* X_i *из* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. *Пусть* $|\delta'(A_i)| \leqslant \tau^3$ *и числа* $n_{F/\mathbb{Q}}(\delta(A_i))$ $(i = 1, 2)$ *взаимно простые. Предположим, что выполнено условие* 1) $0 < \frac{\delta'(A_2)}{\delta'(A_1)} < 1$, *и тогда пусть* $m < \delta'(C) < M$, *где* m *— минимальное, а* M *— максимальное значения из множества* $\{\delta'(A_1)\tau - \delta'(A_2)\tau, -\delta'(A_1) + \delta'(A_2)\}$; *или — условие* 2) $-\tau < \frac{\delta'(A_2)}{\delta'(A_1)} < 0$, *и тогда пусть* $m < \delta'(C) < M$, *где* m *— минимальное,* M *— максимальное значение из* $\{\delta'(A_1)\tau + \delta'(A_2), -\delta'(A_1) - \delta'(A_2)\tau\}$. *При этих условиях количество* $n(X)$ *решений* (X_1, X_2) *уравнения* (2) *с* $1 \leqslant X_2 \leqslant X$ *при* $X \to +\infty$ *вычисляется по асимптотической формуле*

$$n(X) = kX + o(X), \qquad \text{где} \quad k = \frac{1}{|A_1^2 - A_1[(A_1+1)\tau] - [(A_1+1)\tau]^2|}.$$

Список литературы

[1] В. Г. Журавлев, "Одномерные разбиения Фибоначчи," *Изв. РАН. Сер. матем.* (2006) (в печати).

О дифференцировании гипергеометрической функции по параметру

Павел Л. Иванков

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

E-mail: ivankovpl@mail.ru

Пусть

$$\varphi_\lambda(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^\nu}{(\lambda+1)\cdots(\lambda+\nu)}.$$

В докладе будет рассказано о построении приближающей формы вида

$$R(z) = P_0(z) + P_1(z)\varphi_\lambda(z) + P_2(z)\frac{\partial\varphi_\lambda(z)}{\partial\lambda},$$

имеющей максимально возможный порядок нуля при $z = 0$, а также о некоторых обобщениях этой конструкции. Также построения можно использовать для получения арифметических результатов.

Список литературы

[1] А. Б. Шидловский, *Трансцендентные числа*, Наука, Москва, 1987.
[2] K. Mahler, *Lectures on transcendental numbers*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

О применении обобщенной леммы Гельфонда в метрической теории диофантовых приближений на многообразиях[1]

Ella Kovalevskaia
Institute of Mathematics, Minsk, Belorussia

В 1949 г. А. О. Гельфонд [1] доказал теорему, из которой следует, что если многочлены $P(t) \in \mathbb{Z}[t]$, $L(t) \in \mathbb{Z}[t]$ степени, не превосходящей n, и высоты не более Q не имеют общих корней, то при любом $\varepsilon > 0$ и в любой трансцендентной точке ω невозможно выполнение неравенства

$$\max(|P(\omega)|, |L(\omega)|) < Q^{-2n+2-\varepsilon}. \tag{1}$$

В. И. Берник [2] при изучении размерности Хаусдорфа очень хорошо аппроксимируемых рациональными числами точек кривой $\upsilon = (x, x^2, \ldots, x^n)$ усилил результат Гельфонда, дополнив неравенство (1) новой метрической характеристикой. В [3] указанный результат был распространен на диофантовы приближения точек кривой υ в пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$. Последний результат был применен в [4] и [5] для доказательства теорем о мере ψ-аппроксимируемых точек той же кривой в пространствах $\mathcal{O} = \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$ и $\mathcal{O}_1 = \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$. Тем самым была доказана более строгая версия гипотезы В. Г. Спринджука (1980 г.) в $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}_1$. Сформулируем результат из [5].

Пусть $P_n = P_n(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0 \in \mathbb{Z}[t]$, $a_n \neq 0$, $H = H(P_n) = \max_{0 \leqslant i \leqslant n} |a_i|$. Пусть $p \geqslant 2$ — простое число, $\mathbb{Q}_p$ — поле p-адических чисел, $|\cdot|_p$ — p-адическая норма. Определим меру μ in $\mathcal{O}_1$

[1] Работа выполнена в рамках ГПФИ «Математические модели».

как произведение меры Лебега μ_2 в $\mathbb{C}$ и меры Хаара μ_h in $\mathbb{Q}_p$, т. е. $\mu = \mu_2\mu_h$. Пусть $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ — монотонно убывающая функция и $\sum_{n=1}^{\infty} \psi(n) < \infty$. Рассмотрим систему неравенств

$$|P_n(z)| < H^{\lambda_2}\psi^{\nu_2}(H), \quad |P_n(\omega)|_p < H^{\lambda_3}\psi^{\nu_3}(H), \tag{2}$$

где $(z, \omega) \in \mathcal{O}_1$ и параметры удовлетворяют следующим условиям: $\lambda_2 \leqslant 1$, $\lambda_3 \leqslant 0$, $\nu_i \geqslant 0$ $(i = 2, 3)$, $\lambda_2 - \nu_2 < 1$, $\lambda_3 - \nu_3 < 0$. Кроме того, выполняются условия $2\nu_2+\nu_3 = 1$ и $2\lambda_2+\lambda_3 = -n+2$. Заметим, что первая группа условий на параметры исключает тривиальные неравенства в (2). Доказано, что *система неравенств* (2) *имеет не более конечного числа решений в многочленах* P_n *для почти всех* $(z, \omega) \in \mathcal{O}_1$.

Для доказательства этого утверждения исследуется мера множества точек, где величины производных $|P_n'(t)|$ и $|P_n'(t)|_p$ большие, мера множества точек, где они малые, и все промежуточные варианты по отношению к упомянутым нормированиям. Обобщенная лемма Гельфонда применяется в том случае, когда указанные производные не слишком велики. Детали см. в [5].

Список литературы

[1] А. О. Гельфонд, *УМН* **4** (1949), вып. 5 (33), 14–48.
[2] В. И. Берник, *Acta Arith.* **42** (1983), 219–253.
[3] В. И. Берник, Н. И. Калоша, *Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. наук* (2004), no. 1, 121–123.
[4] E. Kovalevskaya, *Math. Slovaca* **54**:3 (2004), 479–486.
[5] E. Kovalevskaya, *Proc. of the 4th Inter. Conf. "Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory"* (Palanga, 25–30 September 2006).

О попадании дискриминантов целочисленных примитивных многочленов в заданные интервалы

Olga Kukso

Institute of Mathematics, Minsk, Belorussia

Для модуля дискриминанта целочисленного многочлена $P(x)$ легко можно получить оценку сверху $K(P)$ через высоту $H(P)$ и степень n полинома. В докладе будет показано, что значения дискриминантов

попадают в любой достаточно большой интервал из $[-K(P), K(P)]$. Кроме этого будет указана оценка снизу для числа таких полиномов.

Some joint theorems for periodic Hurwitz zeta-functions

Antanas Laurinčikas
Vilnius University & Šiauliai University, Lithuania
E-mail: antanas.laurincikas@maf.vu.lt

The periodic Hurwitz zeta-function $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a})$, $s = \sigma + it$, for $\sigma > 1$ is defined by

$$\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{(m+\alpha)^s},$$

and by analytic continuation elsewhere. Here α is a fixed real number, $0 < \alpha \leqslant 1$, and $\mathfrak{a} = \{a_m\}$ is a periodic sequence of complex numbers.

We consider the value - distribution of a system $\zeta(s, \alpha_j; \mathfrak{a}_{jl})$, $j = 1, \ldots, r$, $l = 1, \ldots, l_j$, of periodic Hurwitz zeta-functions, and prove for it a joint limit theorem in the sense of weak convergence of probability measures in the space of analytic functions, the joint universality and functional independence. We state a joint universality theorem only. Let $\mathfrak{a}_{jl} = \{a_{mjl}\}$ have a minimal period k_{jl}, $j = 1, \ldots, r$, $l = 1, \ldots, l_j$. Denote by k the least common multiple of $k_{11}, \ldots, k_{1l_1}, \ldots, k_{r1}, \ldots, k_{rl_r}$, put $\kappa = \sum_{j=1}^{r} l_j$ and define

$$B = \begin{pmatrix} a_{111} & a_{112} & \ldots & a_{11l_1} & \ldots & a_{1r1} & a_{1r2} & a_{1rl_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k11} & a_{k12} & \ldots & a_{k1l_1} & \ldots & a_{kr1} & a_{kr2} & a_{krl_r} \end{pmatrix}.$$

Theorem. *Suppose that $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ are algebraically independent over the field of rational numbers, and that* $\operatorname{rank}(B) = \kappa$. *Let K_{jl} be a compact subset of the strip $\{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \sigma < 1\}$ with connected complement, and $f_{jl}(s)$ be a continuous function on K_{jl} which is analytic in the interior of K_{jl}, $j = 1, \ldots, r$, $l = 1, \ldots, l_j$. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{T \to \infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas}\Big\{\tau \in [0, T] : \sup_{1 \leqslant j \leqslant r} \sup_{1 \leqslant l \leqslant l_j} \sup_{s \in K_{jl}} |\zeta(s + i\tau, \alpha_j; \mathfrak{a}_{jl}) - f_{jl}(s)| < \varepsilon\Big\} > 0.$$

Here $\operatorname{meas}\{A\}$ denotes the Lebesgue measure of a measurable set $A \subset \mathbb{R}$.

The second barrier for automorphic L-functions on the critical line

Jianya Liu
Shandong University, China
E-mail: jyliu@sdu.edu.cn

A central problem in the theory of L-functions is to investigate their sizes on the critical line. The convexity bound, which follows from the Phragmen–Lindelöf principle, is of little use in applications. Therefore much effort has been made to obtain subconvexity bounds for various L-functions, which have also been applied to give various equi-distribution results. In the classical case of the Riemann zeta-function, this convexity bound has the exponent 1/4, and the classical subconvexity theorem of Weyl states that this 1/4 can be reduced to 1/6. This 1/6 has resisted big improvement in the past eighty years, although the famous Lindelöf hypothesis states that it should be reduced to 0. The convexity bound and Weyl's bound are called, respectively, the first and second barrier for the Riemann zeta-function. In this talk, I will report a joint work with Yuk-Kam Lau and Yangbo Ye, in which we reach the second barrier for Rankin–Selberg automorphic L-functions in the spectral aspect.

Exponents of Diophantine approximation

Michel Laurent
Université de la Méditerranée, Marseille, France
E-mail: laurent@iml.univ-mrs.fr

We revisit basic works due to Khintchine and Jarnik in Diophantine approximation and give some new results formulated in terms of exponents of rational approximation.

As an example, we attach to a pair of real numbers a quadruple of exponents which measure the quality of rational approximation to this pair in various meanings. Then, we describe the spectrum of all possible quadruples thus obtained. We also split the classical Khintchine's transference principle into intermediate estimates.

A lot of open problems connected with these topics will also be addressed.

On value-distribution of L-functions from the Selberg class

Renata Macaitiene
Šiauliai University, Lithuania
E-mail: renata.macaitiene@mi.su.lt

In 1989 A. Selberg introduced [1] a class $\mathcal{S}$ of L-functions

$$L(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s}, \quad s = \sigma + it,$$

which became an object of numerous investigations, see a survey paper [2]. Roughly speaking, the functions of the class $\mathcal{S}$ satisfy 4 axioms: Ramanujan conjecture on the coefficients a_m, axioms of analytic continuation, functional equation and Euler product. We consider a subclass $\widetilde{\mathcal{S}} \subset \mathcal{S}$ for which L-functions the following hypotheses are satisfied:

1°) for each prime p and $j = 1, \dots, k$, there exist complex numbers $c_j(p)$, $|c_j(p)| \leqslant 1$, such that

$$L(s) = \prod_p \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{c_j(p)}{p^s}\right)^{-1};$$

2°) there exists a positive constant κ such that

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sum_{p\leqslant x} 1\right)^{-1} \sum_{p\leqslant x} |a(p)|^2 = \kappa.$$

We prove a limit theorem in the sense of weak convergence of probability measures in the space of meromorphic functions for L-functions from the class $\widetilde{\mathcal{S}}$.

Denote by d_L the degree of the function $L(s)$, let

$$D = \left\{ s \in \mathbb{C} : \sigma > \max\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{d_L}\right)\right\},$$

and let $M(D)$ be the space of meromorphic on D functions equipped with the topology of uniform convergence on compacta. Moreover, let $\mathcal{B}(M(D))$ stand for the class of Borel sets of the space $M(D)$, and let meas$\{A\}$ be the

Lebesque measure of a measurable set $A \subset \mathbb{R}$. We consider the probability measure

$$\frac{1}{T}\,\mathrm{meas}\{\tau \in [0,T] : L(s+i\tau) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(M(D)),$$

and prove that it converges weakly to the distribution of some explicitly given random element as $T \to \infty$.

References

[1] A. Selberg, "Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series," *Proceedings of the Amalfi Conference on Analytic Number Theory* (Maiori, 1989), Univ. Salerno, Salerno, 1992, pp. 367–385.

[2] J. Kaczorowski and A. Perelli, "The Selberg class: a survey," *Number Theory in Progress*, Proc. of the Intern. Conf. in honor of the 60th birthday of A. Schinzel (Zakopane, 1997), Vol. 2: *Elementary and Analytic Number Theory*, de Gruyter, Berlin, 1999, pp. 953–992.

Тип трансцендентности для почти всех точек m-мерного вещественного пространства

Sergei V. Mikhailov

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: 666serg@mail.ru

Пусть P — многочлен с целыми коэффициентами, зависящий от m переменных. Обозначим: $\deg P$ — степень P по совокупности переменных, $H(P)$ — максимум модулей коэффициентов P и $t(P) = \deg P + \ln H(P)$ — тип многочлена P. Тогда для почти всех (в смысле m-мерной меры Лебега) точек $\overline{\xi} \in \mathbb{R}^m$ существует константа $c = c(\overline{\xi}) > 0$ такая, что для любого многочлена $P \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_m]$, $P \not\equiv 0$, выполняется неравенство $\ln|P(\overline{\xi})| > -ct(P)^{m+1}$.

Впервые проблема была сформулирована в одномерном случае К. Малером в 1971 г. Предположение, высказанное им, было доказано Ю. В. Нестеренко в 1974 г., и была указана гипотеза, сформулированная выше. В 1990 г. аналогичная гипотеза для пространства $\mathbb{C}^m$ была доказана Ф. Аморозо, но его доказательство оказалось "существенно

комплексным" и не могло быть тривиально адаптировано к вещественной ситуации.

О связи символа норменного вычета с классическими частными Ферма

Вадим В. Назаров

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: vv_nazarov@mail.ru

Пусть p — нечётное простое, $\zeta = e^{2\pi i/p}$, $\lambda = 1-\zeta$. Мы выводим формулы, связывающие символы норменного вычета вида $(a+b\lambda, c+d\lambda)_\lambda$ для целых рациональных a, b, c, d в поле $\mathbb{Q}(\zeta)$ с классическими частными Ферма, зависящими от коэффициентов a, b, c, d. Полученные формулы позволяют вычислять символы норменного вычета со сложностью, растущей как логарифм от степени расширения поля.

Let p be an odd prime, $\zeta = e^{2\pi i/p}$, $\lambda = 1-\zeta$. We obtain formulas, which show the relation between norm residue symbols $(a+b\lambda, c+d\lambda)_\lambda$ for rational integers a, b, c, d in the prime cyclotomic field $\mathbb{Q}(\zeta)$ and Fermat quotients depending on a, b, c, d. These formulas allow to compute norm residue symbols mentioned above with logarithmic complexity by means of the growing parameter p.

Zeta functions of Siegel modular forms and Rankin's lemma of higher genus

A. A. Panchishkin

Institut Fourier, Grenoble, France

Собственные значения операторов Гекке зигелевых модулярных форм определяют дзета-функции А. Н. Андрианова. Изучены их мультипликативные свёртки Ранкина высшего рода. Даны новые тождества для коэффициентов дзета функции и примеры подъёма пар зигелевых модулярных форм.

Eigenvalues of Hecke operators on Siegel modular forms produce zeta functions using the method by A. N. Andrianov. We study their Rankin's

convolutions of higher genus. New identities for their coefficients and applications to lifting of pairs of Siegel modular forms are given (see `arXiv:math.NT/0610417`).

On the resolution of superelliptic equations and binomial Thue equations with unknown exponents

Ákos Pintér[1]

Univertsity of Debrecen, Hungary

E-mail: `apinter@math.klte.hu`

Let a, b, D be positive integers, S the set of integers composed of fixed primes $p_1, \dots, p_s$, and $Q = p_1 \cdots p_s$. There is an extensive literature on equations of the form

$$ax^n - by^n = c \quad \text{in nonzero integers } x, y, c, n \text{ with } c \in S,\ n \geqslant 3, \tag{1a}$$

and

$$f(x, z) = \omega y^n \quad \text{in integers } x, y, z, \omega, n \text{ with } (y, Q) = 1,\ z, \omega \in S,\ n \geqslant 3, \tag{2a}$$

where $f \in \mathbb{Z}[X, Z]$ is a binary form. First we give a brief survey of effective and numerical results concerning (1a), (2a) and their applications. Then we present the following recent theorems which considerably generalize, improve and/or extend the earlier results.

General effective finiteness results. Győry, Pink, P. (2004); Győry, P. (200?):

(i) *Suppose that in* (1a) a, b *are also unknowns with* $a, b \in S$ *and* $(ax, by, c) = 1$. *Then* $\max(|ax^n|, |by^n|, |c|) \leqslant c_1^{\text{eff}}(Q)$.

(ii) *Let in* (2a) $f \in \mathbb{Z}[X, Z]$ *be a binary form of degree* $m \geqslant 3$ *with* $f(1, 0) \in S$ *and with discriminant* $D(f) \in DS$. *Then* $|y|^n \leqslant c_2^{\text{eff}}(m, D, Q)$.

[1]These are joint results with M. A. Bennett, K. Győry, M. Mignotte, and I. Pink.

The equation considered in (i) is a common generalization of binomial Thue equations with unknown exponents and S-unit equations over $\mathbb{Q}$. In (ii), $D(f)$ may be replaced by a more general discriminant concept. Of particular interest is the special case $F(1,0) = 1, z = 1, D = 1$ of (ii). As to the dependence on parameters in the bounds, (i) and (ii) can be regarded as definitive results; (i) and (ii) have been established in a more general form, over number fields. The proofs involve among others the theory of logarithmic forms.

Complete solution of equations. The general bounds on the solutions of equations of the form (1a), (2a) are too large for practical use. Consider the following important special cases of equations (1a) and (2a):

$$ax^n - by^n = \pm 1 \quad \text{in nonzero integers } x, y, n \text{ with } n \geqslant 3, \tag{1b}$$

and

$$x(x+1) = \omega y^n \quad \text{in nonzero integers } x, y, \omega, n \text{ with } |y| > 1,\ n \geqslant 3. \tag{2b}$$

Equations (1b) and (2b) have been **completely solved** in the following cases.

- a, b, ω **fixed**: Győry, P (2007):

  (iii) *In* (1b) $\max(a,b) \leqslant 30$ *or* $a = 1, b \leqslant 120$,

  (iv) *In* (2b) $|\omega| \leqslant 60$.

- a, b, ω **unknowns from** $S = \{\pm p_1^u p_2^v$ with primes $p_1 < p_2 < 30$ and integers $u, v \geqslant 0\}$: Bennett, Győry, Mignotte, P. ($p_2 \leqslant 13$; 2006), Győry, P. (200?), Bugeaud, Mignotte, Siksek ($a = p_1^u, b = p_2^v$; 200?):

  (v) *In* (1b) a, b *are also unknowns with* $a, b \in S$,

  Bennett, Győry, Mignotte, P. ($p_2 \leqslant 13$; 2006), Győry, P. (200?):

  (v) *In In* (2b) w *is also unknown with* $w \in S$.

The complete lists of solutions will be presented in the talk. In cases (iii)–(vi), no solution exists with $n > 6$ and $|y| > 1$. The proofs require a combination of recent lower bounds for linear forms in three and more logarithms and some results and methods based on ternary equations, modular forms and Galois representations with certain classical results in cyclotomic fields, the hypergeometric method, involved local considerations and modern computational techniques.

Some applications of (iii)–(vi) will also be mentioned.

Аналоги частных Ферма и подъём решений показательных сравнений в кольцах целых алгебраических чисел

Илья А. Поповян

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: ip@grek.dspgroup.ru

Пусть K — конечное расширение $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_K$ — его кольцо целых. Обозначим через $\mathfrak{p}$ простой идеал $\mathbb{Z}_K$, лежащий над $p \in \mathbb{Z}$, и пусть e — его индекс ветвления, f — его степень расширения, $\rho = [e/(p-1)] + 1$ и $\pi \in \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2$. Обозначим также через ν показатель $\mathbb{Z}_K$, соответствующий $\mathfrak{p}$, и пусть $\mathbb{Z}_\nu$ — его кольцо целых.

При $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_K \setminus \mathfrak{p}$ рассмотрим задачу сведения решения показательного сравнения

$$\alpha^x \equiv \beta \bmod \mathfrak{p}^N, \quad x \in \mathbb{Z},$$

к случаю $N = 1$.

Для $s, M \in \mathbb{N}$ определим на подгруппе единиц показателя ν,

$$U_s := \{\eta \in \mathbb{Z}_\nu : \nu(\eta - 1) \geqslant s\},$$

функции $Q_{s,\pi^M} : U_s \to \mathbb{Z}_\nu$ по аналогии с частными Ферма:

$$Q_{s,\pi^M}(\eta) = \frac{\eta^{\lambda_s(\pi^M)} - 1}{\pi^M}.$$

Здесь $\lambda_s(\pi^M)$ — функция Кармайкла группы U_s/U_M, равная по определению наименьшему общему кратному порядков образов элементов $\eta \in U_s$ в $(\mathbb{Z}_\nu/\pi^M)^*$. Можно показать, что $\lambda_s(\pi^M) = p^{\lceil (M-s)/e \rceil}$ при $M \geqslant s > \rho$.

Теорема. *Пусть* $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_K \setminus \mathfrak{p}$, $N \in \mathbb{N}$, $N > \rho$. *Положим* $s = \nu(\alpha^{p^t(p^f-1)} - 1)$, *где* $t \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \operatorname{ord}_{\mathfrak{p}^\rho}(\alpha^{p^f-1}) = p^t$, *и пусть* $s < \infty$. *Пусть также* $x_0 \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant x_0 < p^t$, *таково, что* $\alpha^{x_0(p^f-1)} \equiv \beta^{(p^f-1)} \bmod \mathfrak{p}^s$. *Тогда показательное сравнение*

$$\alpha^{(x_0+yp^t)(p^f-1)} \equiv \beta^{(p^f-1)} \bmod \mathfrak{p}^N, \quad y \in \mathbb{Z},$$

эквивалентно линейному сравнению

$$yQ_{s,\pi^{s+e\lceil N/e\rceil}}(\alpha^{p^t(p^f-1)}) \equiv Q_{s,\pi^{s+e\lceil N/e\rceil}}((\beta\alpha^{-x_0})^{(p^f-1)}) \bmod \pi^{N-s},\ y \in \mathbb{Z},$$

причем для коэффициента в его левой части верно

$$\nu\big(Q_{s,\pi^{s+e\lceil N/e\rceil}}(\alpha^{p^t(p^f-1)})\big) = 0.$$

Linear and algebraic independence of q-zeta values

Yuri A. Pupyrev

Moscow Lomonosov State University

E-mail: pupyrev@mi.ras.ru

We discuss linear and algebraic independence results for the q-series

$$\zeta_q(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{s-1}(n)q^n, \qquad s = 1, 2, \ldots,$$

where $\sigma_{s-1}(n) = \sum_{d|n} d^{s-1}$.

Arithmetical applications of the lagrangian interpolation

Tanguy Rivoal

Université Joseph Fourier, Saint-Martin-d'Héres, France

E-mail: rivoal@ujf-grenoble.fr

Gel'fond proved the transcendence of $\exp(\pi)$ by mean of the expansion of the exponential function in polynomial interpolation series at the points of $\pi\mathbb{Z}[i]$. I will explain how to adapt this kind of proof to show the irrationality of $\log(2)$, $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$ by means of rational interpolation series related to the Hurwitz zeta function.

A generalization of Pólya's theorem

Igor P. Rochev

Moscow Lomonosov State University

A classical theorem of Pólya states that *if an entire function* $f(z)$ *satisfies* $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$ *and* $f(z) = O(e^{\gamma|z|})$ *with* $\gamma < \log 2$ *then* $f(z)$ *is a polynomial*. The example $f(z) = 2^z$ shows that the condition $\gamma < \log 2$ cannot be weakened. Gel'fond initiated several generalizations of Pólya's theorem; a lot of results in this direction were obtained during the last century.

In our talk we discuss a new generalization of Pólya's theorem. Namely, our results (for two special cases $U = \mathbb{N}$ and $U = \mathbb{Z}$ below) may be stated as follows.

Theorem. *Let an entire function* $f(z)$ *satisfy* $f(U) \subset \mathbb{K}$, *where* $\mathbb{K}$ *is an algebraic extension of* $\mathbb{Q}$ *of degree* h. *Assume that for* $n \in U$ *the estimates of the form* $O(e^{\alpha|n|})$ *for both the denominator of* $f(n)$ *and the house of* $f(n)$ *are known, where* α *is some positive constant. Furthermore, if* $f(z) = O(e^{\gamma|z|})$, *where* γ *does not exceed some positive bound depending on* h *and on* α (*as well as on* U), *then* $f(z)$ *is a polynomial.*

We show that a possible choice of the bound for γ is $\exp\{-A\alpha h - Bh\}$, where A and B are certain explicit constants. We also present some examples illustrating exactness of our bounds for γ.

О мере иррациональности $\log 3$

Владислав Х. Салихов

Брянский государственный технический университет

Получена новая оценка меры иррациональности числа $\log 3$: $\mu(\log 3) \leqslant 5.125$. Прежняя оценка $\mu(\log 3) \leqslant 8.616$ принадлежала Дж. Рину (1986 г.).

Диофантовы приближения $\log 2$ и других логарифмов

Екатерина С. Сальникова

Брянский государственный технический университет

Излагается новый подход, без улучшения результата Е. А. Рухадзе (1987 г.), для оценки $\mu(\log 2)$. Даются оценки приближений:

1) числа $\log 2$ числами из поля $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$:

$$\left|\log 2 - \frac{p_1\sqrt{2}+p_2}{q}\right| > \frac{1}{Q^{9.307}}, \qquad \begin{array}{c} p_1, p_2 \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N}, \\ Q = \max\{|p_1|, |p_2|, q\}; \end{array}$$

2) числа $\log \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ числами из поля $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$:

$$\left|\log \frac{\sqrt{5}-1}{2} - \frac{p_1\sqrt{5}+p_2}{q}\right| > \frac{1}{Q^{10.02}},$$

в частности, мера иррациональности логарифма "золотого сечения" $\mu\left(\log \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \leqslant 10.02$, а также рассматривается его обобщение;

3) числа $\log \dfrac{5}{3}$: $\mu\left(\log \dfrac{5}{3}\right) \leqslant 7.214$; предыдущая оценка меры иррациональности этого числа была объявлена Е. А. Рухадзе (1987 г.) и составляла $\mu\left(\log \dfrac{5}{3}\right) \leqslant 9.012$.

Special values of some L-functions

Natarajan Saradha[1]

Tata Institute of Fundamental Research, Mumbai, India

E-mail: saradha@math.tifr.res.in

Let f be an algebraic valued, periodic function with period q. Let

$$L(s,f)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}.$$

Baker, Birch and Wirsing gave necessary conditions under which $L(1,f)$ does not vanish. In this talk, I shall present a variant of this result. Further, for an integer $s>1$ and f rational valued, it is shown that $L(s,f)\neq 0$ whenever s and f are of the same parity, thereby proving the transcendence of such $L(s,f)$.

Orbit sums method in the theory of modular vector invariants

Sergey A. Stepanov

Institute for Problems of Information Transmission, Moscow

E-mail: sa-stepanov@iitp.ru

Let F be a field, V an n dimensional F-vector space, $G\leqslant GL_n(F_p)$ a finite group, and $V^{\oplus m}$ the m-fold direct sum with diagonal action of G. The group G naturally acts on the symmetric graded algebra $A_{m,n}=F_p[V^{\oplus m}]$. Let $A_{m,n}^G$ denote the subalgebra of vector invariants of the polynomial algebra $A_{m,n}$ under action of G. A classical result of Nöther implies that if char $F=0$ then $A_{m,n}$ is generated as an F-algebra by homogeneous polynomials of degree at most $|G|$, no matter how large m is. On the other hand, it was recently proved by D. Richman that this result does no longer hold when the characteristic of F divides $|G|$ (modular case).

Let p be a prime number, F_p a finite field with p elements, H a cyclic group of order p, and V a linear F_p-vector space of dimension n. The aim of this talk is to demonstrate a new purely arithmetical method which gives a

[1]This is a joint work with M. Ram Murty.

possibility to determine explicitly the set of generators of $A_{m,n}^H$ for a series of cyclic groups H. This result extends the corresponding results of Richman and also a result of Campbell and Hughes concerning the case $n = 2$ and $p > 2$. As a consequence, it is shown that if $G \geqslant H$ is an arbitrary finite group containing H as a subgroup then each system of generating elements of the algebra $A_{m,n}^G$ contains a generator whose degree is greater than or equal to $c(n, p, r) \cdot m$ for all $m > n$, where $c(m, p, r)$ is a positive constant depending only of n, p and the number r of nontrivial Jordan's blocks of the matrix H.

О формулах Грегори и Эйлера–Маклорена в классе целых функций

С. А. Степин & К. М. Фирсов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Результатом работы является обоснование формул исчисления конечных разностей Грегори и Эйлера–Маклорена для целых функций с ограничением сверху на экспоненциальный тип роста. А именно, для целых функций порядка роста единица и типа роста меньше $\ln 2$ установлены формулы Грегори

$$f'(z) = \Delta f(z) - \frac{\Delta^2 f(z)}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{\Delta^n f(z)}{n} + \cdots,$$

$$\int_a^{a+n} f(z)\,dz = \frac{1}{2}f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} f(a+k) + \frac{1}{2}f(a+n) + \sum_{k=2}^{\infty} C_k(\Delta^{k-1}f(a+n) - \Delta^{k-1}f(a)),$$

где $\Delta f(z) = f(z+1) - f(z)$, а C_k — коэффициенты тейлоровского разложения в нуле функции $t/\ln(1+t)$; формула Эйлера–Маклорена

$$\int_a^{a+n} f(x)\,dx = \frac{1}{2}f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} f(a+k) + \frac{1}{2}f(a+n) - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{B_k}{k!}(f^{(k-1)}(a+n) - f^{(k-1)}(a)).$$

обоснована для целых функций порядка 1 типа меньше 2π, причем в рассмотренном классе обе указанные границы являются точными.

Формальные символьные манипуляции с рядами и полученными с помощью рядов функциями от оператора дифференцирования широко применялись в первой половине 19-го века для вывода некоторых формул теории квадратур и интерполяции. Класс функций, для которых подобный вывод может считаться законным, как правило, ограничивается многочленами; для произвольных же бесконечно дифференцируемых функций указанные формулы нуждаются в дальнейшем обосновании. Традиционная форма записи этих формул с остаточным членом дает слишком ограничительные условия сходимости соответствующих рядов.

Simultaneous linear forms in logarithms and powers of rationals

Cameron Stewart

University of Waterloo, Canada

E-mail: cstewart@math.uwaterloo.ca

In this talk we shall discuss two applications of estimates for simultaneous linear forms in logarithms to problems concerning sets of powers of rational numbers.

Linear forms, Diophantine equations and finite arithmetic progressions

Robert Tijdeman

Universiteit Leiden, Nederlands

E-mail: tijdeman@math.leidenuniv.nl

This is a survey talk on developments starting with the work of Gelfond on linear forms in two logarithms, followed by Baker's work on linear forms in any number of logarithms, its applications to Diophantine equations and its entirely new applications to exponential Diophantine equations. The last part of the talk will be devoted to some recent work on the arithmetic

character of the product of the terms of a finite arithmetic progression. In this work, which has its root in a result claimed by Fermat and proved by Euler, a variety of methods, among which estimates for linear forms in logarithms, has been combined.

О совместных диофантовых приближениях некоторых классов чисел

Елена Б. Томашевская

Брянский государственный технический университет

Получены оценки нетривиальных линейных комбинаций чисел вида:

1) $A = r_1 \log 2 + r_2 \operatorname{arctg} \dfrac{1}{7}$, $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$: $\mu(A) \leqslant 4.997$;

2) $B = r_1\pi + r_2 \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$, $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$: $\mu(B) \leqslant 10.36$.

О линейной независимости значений функции Лерха

Евгений А. Уланский

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: `ulanskiy@mail.ru`

В работе [1] исследуется вопрос о количестве линейно независимых чисел среди значений в рациональных точках функций

$$\mathrm{Li}_s(z) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{z^n}{n^s}, \qquad s \in \mathbb{N}.$$

Эти функции называются полилогарифмами и являются частным случаем функции Лерха

$$\Phi_s\left(z, \frac{p}{q}\right) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{z^n}{(n + p/q)^s}, \qquad \text{где} \quad p, q \in \mathbb{Z},\ 0 \leqslant |p| < q,\ (p, q) = 1.$$

В нашей работе изучается линейная независимость значений функции Лерха и получены следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть* $\gamma \in \mathbb{Q}$, $0 < \gamma \leqslant 1$, $a \in \mathbb{N}$, $a \geqslant 2$. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существует целое число* $A(\varepsilon, \gamma)$ *такое, что для всех* $a \geqslant A(\varepsilon, \gamma) \geqslant 1$ *среди чисел*

$$1,\ \Phi_1\left(\gamma, \frac{p}{q}\right),\ \ldots,\ \Phi_a\left(\gamma, \frac{p}{q}\right)$$

имеется не менее $\dfrac{1-\varepsilon}{1+\ln(2)} \ln(a)$ *линейно независимых над* $\mathbb{Q}$.

Замечание. В случае $\gamma = 1$ оценивается количество линейно независимых среди чисел 1, $\Phi_2(\gamma, p/q)$, $\ldots$, $\Phi_a(\gamma, p/q)$.

Следствие. *Для любых рациональных чисел* γ, v, $0 < \gamma \leqslant 1$, $0 \leqslant v < 1$, *набор* $\{\Phi_s(\gamma, v) : s \geqslant 1\}$ *содержит бесконечно много иррациональных чисел.*

Как следствие теоремы 1 получается результат о линейной независимости L-рядов Дирихле.

Теорема 2. *Пусть* $a \geqslant 2$. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существует целое число* $A(\varepsilon)$ *такое, что для всех* $a \geqslant A(\varepsilon) \geqslant 1$ *среди чисел*

$$1 \quad и \quad L(s, \chi), \quad s = 2, \ldots, a, \ \ \chi \ - \ все\ характеры\ mod\ q,$$

имеется не менее $\dfrac{1-\varepsilon}{1+\ln(2)} \ln(a)$ *линейно независимых над* $\mathbb{Q}$.

Список литературы

[1] T. Rivoal, *Propriétés diophantiennes de la fonction zêta de Riemann aux entiers impairs*, Thèse de doctorat, Université de Caen, 2001.

A refinement of the Kušnirenko–Bernštein theorem

Patrice Philippon[1]

Institut de Mathématiques Géométrie et Dynamique, Paris, France

E-mail: pph@ccr.jussieu.fr

Counting isolated roots of a system of polynomials in a torus is related to combinatorial datas attached to the system. A theorem of Kušnirenko and Berštein shows that the number of roots (counted with multiplicities) is bounded above by the so-called mixed-volume of the supports of the polynomials. This upper bound is known to be exact for generic systems with given supports. We improve on this result by introducing a refined combinatorial description of the support of a polynomial, introducing a generalization of the mixed-volume of convex bodies: the mixed-integral of concave functions.

О больших значениях модуля тригонометрической суммы[2]

Gregory A. Freiman[§] & Alexander A. Yudin[♯]

[§]Tel-Aviv University

[♯]Vladimir State Pedagogical University

E-mail: aayudin@vgpu.vladimir.ru

Пусть $A \subset \mathbb{Z}_q$ и

$$S_A(x) = \sum_{a \in A} e^{2\pi i \frac{a \cdot x}{q}},$$

$|A| = \operatorname{card} A$. Для обратных аддитивных задач теории чисел [1], [2], [3] и задач, как теперь говорят, арифметической комбинаторики [4], [5], важно знать как мощность, так и аддитивную структуру множества тех $x \in \mathbb{Z}_q$, для которых $|S_A(x)|$ "велик". Для теории вероятностей [6], [7], [8] важно знать аддитивную структуру тех множеств A, для которых множество

$$E_q(A, \alpha) = \{x : |S_A(x)| > \alpha |A|\}$$

[1]This is a joint work with with Martín Sombra.

[2]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ no. 05-01-00617.

имеет, например, наибольшую мощность. Настоящий доклад будет посвящен следующей задаче. Найти

$$F(h,a)=\max_{A\subset\mathbb{Z}_q}\sum_{j=1}^{h}|S_A(a_j)|,$$

если для всех $j\quad a_j\in B\subset\mathbb{Z}_q$, $|B|=h$, $a_i\neq -a_j$, $i\neq j$, и описать структуру экстремального множества A.

Грубую оценку для $F(h,a)$ получаем из равенства Парсеваля

$$\sum_{j=1}^{h}|S_A(a_j)|\leqslant\sqrt{h}\cdot\sqrt{\sum_{x\neq 0}|S_A(x)|^2}=h^{\frac{1}{2}}\sqrt{q|A|-|A|^2}\leqslant\frac{1}{2}\cdot h^{\frac{1}{2}}\cdot q. \quad (1)$$

Естественно возникает вопрос, насколько точно это неравенство. Как можно видеть (см. [9]), $F(1,q)\approx\frac{1}{\pi}q$. Экстремальное множество — это арифметическая прогрессия длины $q/2$. Так что при $h=1$ неравенство (1) не так уж и "грубо". При $h=2$ довольно сложные выкладки показывают, что

$$F(2,q)\approx\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}q$$

арифметическая прогрессия имеет размерность 2, а экстремальное множество есть арифметическая прогрессия длины $q/3$; в противном случае

$$F(2,q)\approx\frac{4}{\pi^2}q,$$

экстремальное множество A в этом случае есть f-изоморфный образ множества $K'=\{K\cap\mathbb{Z}_n^2\}$, где K — выпуклое множество, а $\operatorname{card}K'=q/2+o(1)$.

В целом ответ дает

Теорема. *При* $h\leqslant\log\log q$

$$\max_{A\subset\mathbb{Z}_q}\sum_{j=1}^{h}|S_A(a_j)|=c\cdot h^{1/2}\cdot q+o(q^{1/2}),$$

экстремальное множество A, *f-изоморфный образ множества* $K'=\{K\cap\mathbb{Z}_n^h\}$, *где* K — *выпуклое множество и* $\operatorname{card}K'=q/2+o(\sqrt{q})$.

Список литературы

[1] G. A. Freiman, *Foundations of a structure theory of set addition*, Transl. Math. Monogr. **37**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1973.

[2] G. A. Freiman, "Structure theory of set addition," *Astérisque* **258** (1999), 1–33.
[3] M. C. Chang, "A polynomial bound in Freiman's theorem," *Duke Math. J.* **113** (2000), 399–419.
[4] И. Д. Шкредов, "О множествах больших тригонометрических сумм," *Докл. РАН* **411** (2006), no. 4.
[5] Green B., "Spectral structure of sets of integers", *Fourier analysis and convexity* (Milan 2001), *Appl. Numer. Harmon. Anal.*, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2004, pp. 83–96.
[6] T. V. Arak and A. Yu. Zaitzev, "Uniform limit theorems for sums of independent random variables," *Proc. Steklov Inst. Math.* **174** (1998).
[7] J.-M. Deshouillers, G. A. Freiman, and A. A. Yudin, "On bounds for the concentration function. II," *J. Theoret. Probab.* **14** (2001), 813–820.
[8] G. A. Freiman and A. A. Yudin, "The interface between probability theory and additive number theory (local limit theorems and structure theory of set addition," *Amer. Math. Soc. Transl.* (2) **217** (2006), 51–72.
[9] G. A. Freiman, S. Litsyn and A. A. Yudin, "A method to suppress high peaks in BPSK-modulated OFDM signal," *IEEE Trans. Comm.* **52** (September 2004), no. 9, 1440–1443.

Exponential Diophantine equations and linear forms in p-adic logarithms

Noriko Hirata-Kohno

Nihon University, Tokyo, Japan

E-mail: subspace@mail.hinocatv.ne.jp

We first recall effective Diophantine approximations due to Gel'fond around linear forms in p-adic logarithms and several applications.

We then consider the following equation. Let A, B, C be rationals with $ABC \neq 0$ and $a_1, a_2, \ldots, a_l$, $b_1, b_2, \ldots, b_m$, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ be rational integers. Suppose the 3 numbers $a_1 a_2 \cdots a_l$, $b_1 b_2 \cdots b_m$, $c_1 c_2 \cdots c_n$ are relatively coprime. Consider

$$Aa_1^{x_1} a_2^{x_2} \cdots a_l^{x_l} + Bb_1^{y_1} b_2^{y_2} \cdots b_m^{y_m} + Cc_1^{z_1} c_2^{z_2} \cdots c_n^{z_n} = 0$$

where $x_1, x_2, \ldots, x_l$, $y_1, y_2, \ldots, y_m$, $z_1, z_2, \ldots, z_n$ are viewed as integer unknowns.

Gel'fond proved that this equation has only finitely many solutions with an implicit effective upper bound for the height of solutions. We discuss an alternative approach to determine such a bound. We present a result concerning with a system of congruence from which we deduce this finiteness. We also deal with general result and functional cases.

On a measure of algebraic independence of values of $\mathrm{sn}(z)$

Yaroslav M. Kholyavka

I. Franko National University, Lviv, Ukraine

Let $\mathrm{sn}(z)$ be the Jacobi elliptic function, $\varkappa$ an algebraic number ($\varkappa \neq 0; 1$); let $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ be algebraic numbers linearly independent over $\mathbb{Q}$ and $\beta_1, \ldots, \beta_k$ numbers such that $\mathrm{sn}(\alpha_1), \ldots, \mathrm{sn}(\alpha_n)$ are algebraic over $\mathbb{Q}(\beta_1, \ldots, \beta_k)$. Then for any polynomial $A \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_k]$, $A \not\equiv 0$, whose degree does not exceed D and the absolute value of its coefficients does not exceed H, the inequality

$$|A(\beta_1, \ldots, \beta_k)| \geqslant H^{-c_1 D^k}$$

holds, where H and D are positive numbers such that

$$\ln \ln H \geqslant c_2 D^k \ln(D+1), \quad D \geqslant 1,$$

and c_1, c_2 are positive constants depending only on $\varkappa$ and on $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Powers of roots in $\mathbb{Q}$-linear subspaces of the field of algebraic numbers

Andrzej Schinzel[1]
Institute of Mathematics, Warsaw, Poland
E-mail: a.schinzel@impan.gov.pl

The following theorem is proved. Let w be a root of a rational number, n the least positive integer such that $w^n = l/m$, l, m integers and V a $\mathbb{Q}$-linear subspace of dimension r of $\mathbb{Q}(w)$. Then the number of integers j such that $1 < j < n$ and w^j is in V does not exceed

$$2e^C \cdot \frac{|lm|}{\varphi(|lm|)} \cdot r(2 + \log r),$$

where C is Euler's constant. The bound is independent of n.

On sets of large exponential sums[2]

Ilya D. Shkredov
Moscow State University, Russia
E-mail: ishkredov@rambler.ru

Let A be a set of residue classes modulo a positive integer N, and let $\alpha \in (0, 1)$. What is the structure of the set $\mathcal{R}_\alpha(A)$ of those elements $u \in \mathbb{Z}_N$ such that the Fourier transform $\widehat{A}(u)$ of the set A at u satisfies $|\widehat{A}(u)| > \alpha|A|$? Results in this direction were obtained by Freiman and Yudin in the seventies, Besser in 1999, Lev in 2002 and Green in 2004. Another important result was obtained by Chang who has applied it to sharpen the well-known theorem of Freiman on the structure of sets with small sumset. Recently, the author proved, in particular, that the equation $r_1 + r_2 = r_3 + r_4$ has at least $|\mathcal{R}_\alpha(A)|^{2+\varepsilon}$ solutions in $r_1, r_2, r_3, r_4 \in \mathcal{R}_\alpha(A)$, for a fixed absolute constant $\varepsilon > 0$. We are going to discuss some of the generalizations and applications of our results.

[1]This is a joint work with W. M. Schmidt.

[2]This work was supported by RFFI grant no. 06-01-00383, by President's of Russian Federation grant no. 1726.2006.1, and by INTAS grant no. 03-51-5-70.

Неоднородные диофантовы приближения и распределение дробных долей[1]

Anton V. Shutov
Vladimir State Pedagogical University, Russia

Пусть α иррационально, $I \subset (0;1)$ — некоторый интервал, $|I| = \beta$. Через $\langle x \rangle$ будем обозначать дробную долю числа x. Пусть

$$N(\alpha, n, I) = \#\{k : 1 \leqslant k \leqslant n : \langle k\alpha \rangle \in I\}$$

— число точек вида $\langle k\alpha \rangle$, $1 \leqslant k \leqslant n$, попавших в интервал I. Рассмотрим величину $r(\alpha, n, I) = |N(\alpha, n, I) - n\beta|$ — остаточный член проблемы распределения дробных долей.

В настоящее время получены [1] близкие к оптимальным оценки величины $\Delta_n(\alpha) = \sup_I r(\alpha, n, I)$. В то же время об остатках $r(\alpha, n, I)$ на конкретных интервалах I почти ничего не известно. Исключением является случай интервалов ограниченного остатка [2].

Нами получены оценки для $r(\alpha, n, I)$ в случае произвольного интервала I и иррациональностей с ограниченными неполными частными разложения в цепную дробь. Доказательство основано на аппроксимации произвольного интервала I интервалами ограниченного остатка.

Определим последовательность наилучших α-приближений к β: $A_{\alpha\beta}(0) = 0$,

$$A_{\alpha\beta}(m+1) = \min\{k \in \mathbb{N} : \|k\alpha - \beta\| < \|A_{\alpha\beta}(m)\alpha - \beta\|\}.$$

Скорость приближения описывается величиной $a_{\alpha\beta}(n) = \min\{m : A_{\alpha\beta}(m) > n\}$.

Теорема. *Пусть все неполные частные разложения α в цепную дробь меньше K. Тогда*

$$r(\alpha, n, I) \leqslant (K+2)a_{\alpha\beta}(n) + K + 1.$$

Следствие 1. *Пусть все неполные частные разложения α в цепную дробь ограничены. Тогда $r(\alpha, n, I) = O(a_{\alpha\beta}(n))$.*

Следствие 2. *Пусть все неполные частные разложения α в цепную дробь ограничены. Тогда для любой функции $f(n)$ такой, что $f(n) \to \infty$ при $n \to \infty$ существует интервал I, для которого $r(\alpha, n, I) \to \infty$ при $n \to \infty$ и $r(\alpha, n, I) = o(f(n))$.*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант no. 05-01-00435.

Будут также рассмотрены аналоги этих результатов для иррациональностей с неограниченными неполными частными разложения в цепную дробь.

Список литературы

[1] C. G. Pinner, "On sums of fractional parts $\{n\alpha+\gamma\}$," *J. Number Theory* **65** (1997), 48–73.

[2] А. В. Шутов, "Системы счисления и множества ограниченного остатка," *Сборник трудов конференции "Аналитические и комбинаторные методы в теории чисел"*, Москва, 2006.

Algebraic relations for reciprocal sums of Fibonacci numbers

Carsten Elsner[§] & Shun Shimomura[♯] & Iekata Shiokawa[♯]

[§]University of Applied Sciences, Hannover, Germany

[♯]Keio University, Yokohama, Japan

E-mail: shiokawa@beige.ocn.ne.jp

Let $\{F_n\}_{n\geqslant 0}$ and $\{L_n\}_{n\geqslant 0}$ be Fibonacci numbers and Lucas numbers defined by

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad (n \geqslant 0),$$
$$L_0 = 2, \quad L_1 = 1, \quad L_{n+2} = L_{n+1} + L_n \quad (n \geqslant 0).$$

Duverney, Ke. Nishioka, Ku. Nishioka, and the third-named author [1] proved the transcendence of the numbers

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n^{2s}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L_n^{2s}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2n-1}^{s}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L_{2n}^{s}} \qquad (s = 1, 2, 3, \ldots)$$

by using Nesterenko's theorem [4] on Ramanujan functions $P(q)$, $Q(q)$, and $R(q)$.

Let us set

$$\zeta_{\mathrm{F}}(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n^s} \qquad (s = 1, 2, 3, \ldots).$$

In [2], we proved that the values $\zeta_{\mathrm{F}}(2)$, $\zeta_{\mathrm{F}}(4)$, $\zeta_{\mathrm{F}}(6)$ are algebraically independent, and that for any integer $s \geqslant 4$,

$$\zeta_{\mathrm{F}}(2s) - 5^{s-2} r_s \zeta_{\mathrm{F}}(4) \in \mathbb{Q}(u, v), \quad u = \zeta_{\mathrm{F}}(2), \quad v = \zeta_{\mathrm{F}}(6)$$

with some $r_s \in \mathbb{Q}$ ($r_s = 0$ if and only if s is odd), where the rational function of u and v is explicit; for example,

$$\zeta_{\mathrm{F}}(8) - \frac{15}{14}\zeta_{\mathrm{F}}(4) = \frac{1}{378(4u+5)^2}(256u^6 - 3456u^5 + 2880u^4 + 1792u^3v - 11100u^3 + 20160u^2v - 10125u^2 + 7560uv + 3136v^2 - 1050v).$$

Similar results were obtained for

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}F_n^{-2s}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}L_n^{-2s}, \quad \text{and} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}L_n^{-2s}.$$

In this talk, we discuss the algebraic independence and algebraic relations for reciprocal sums of odd type:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{F_{2n-1}^s}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{L_{2n-1}^{2s}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{L_{2n-1}^{2s+1}},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n-1)^{2s+1}}{F_{2n-1}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^{2s+1}}{L_{2n-1}}$$

($s = 1, 2, 3, \ldots$).

References

[1] D. Duverney, Ke. Nishioka, Ku. Nishioka, and I. Shiokawa, "Transcendence of Rogers–Ramanujan continued fraction and reciprocal sums of Fibonacci numbers," *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **73** (1997), 140–142.

[2] C. Elsner, S. Shimomura, and I. Shiokawa, "Algebraic relations for reciprocal sums of Fibonacci numbers," *Preprint* (2006).

[3] C. Elsner, S. Shimomura, and I. Shiokawa, "Algebraic relations for reciprocal sums of odd terms in Fibonacci numbers," *Preprint* (2006).

[4] Yu. V. Nesterenko, "Modular functions and transcendence questions," *Mat. Sb.* **187** (1996), 65–96; English transl., *Sb. Math.* **187** (1996), 1319–1348.

Contents (Содержание)